

# LES NOMBRES REELS ET SOUS-ENSEMBLES REMARQUABLES

## I- Généralité :

### A- Ensemble des nombres réels :

$\mathbb{R}$  est un corps cumulatif, totalement ordonné et complet. C'est donc un ensemble  $\mathbb{R}$  muni de deux opérations notées l'une additivement (+) et l'autre multiplicativement ( $\cdot$  ou  $\times$ , ou même, quand il n'y a pas d'ambiguïté, simple juxtaposition) qui jouissent des propriétés suivantes :

$$a + b = b + a \text{ (commutativité),}$$

$$(a + b) + c = (b + c) \text{ (associativité),}$$

$$a + 0 = a \text{ (existence de l'élément neutre pour l'addition),}$$

$$a + (-a) = 0 \text{ (existence de l'élément opposé),}$$

$$ab = ba \text{ (commutativité),}$$

$$(ab)c = a(bc) \text{ (associativité),}$$

$$a1 = a \text{ (existence de l'élément neutre pour la multiplication),}$$

$$aa^{-1} = a \text{ (existence de l'inverse pour } a \neq 0),$$

$$a(b + c) = ab + ac \text{ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).}$$

A partir de deux opérations introduites, on définit l'opération de soustraction :

$$a - b = a + (-b),$$

et l'opération de division :

$a/b = ab^{-1}$  ( $b \neq 0$ ).  $\mathbb{R}$  est totalement ordonné ; autrement dit on définit une relation d'ordre, notée  $<$ , telle que pour tout couple de nombres  $(a, b)$ , avec  $a \neq b$  on ait soit  $a < b$ , soit  $b < a$  ; la relation est transitive, c'est-à-dire  $a < b$  et  $b < c$  impliquent  $a < c$ . La relation d'ordre est compatible avec les opérations :

$$a < b \text{ implique } a + c < b + c,$$

$$0 < a \text{ et } 0 < b \text{ impliquent } 0 < ab.$$

L'ensemble est complet pour la relation d'ordre, ce qui signifie que tout **sous-ensemble** borné supérieurement (respi. Inférieurement) admet une borne supérieure (resp. une borne inférieure).

### B- Ensemble des Entiers naturels $\mathbb{N}$ :

Ils sont caractérisés par des **axiomes** de **Peano**, est fermé pour les opérations d'addition et de multiplication ; il admet un élément neutre pour la multiplication ; il est bien ordonné (tout ensemble non vide a un minimum) et archimédien (si  $a$  et  $b$  sont **deux** entiers naturels, il existe **un** entier naturel  $n$  tel que  $b < na$ ).

### C- Ensemble des Entiers relatifs $\mathbb{Z}$ :

Il jouit des mêmes propriétés que l'ensemble des entiers, à cela près qu'il n'est pas bien ordonné. De plus, il est fermé pour la soustraction et, donc, contient la solution de toute équation de type  $bx + a = a$ , où  $a$  et  $b$  sont deux entiers relatifs. Tout entier relatif peut être exprimé comme la différence de deux entiers naturels.

### D- Ensemble des Nombres rationnels $\mathbb{Q}$ :

Il jouit de mêmes propriétés que l'ensemble des entiers relatifs. De plus, il contient l'inverse de tout nombre non nul, et donc la solution de toute équation de type  $bx = a$  ( $b \neq 0$ ) ; en outre, il est dense pour la relation  $<$  (autrement dit, pour tout couple  $(a, b)$  de nombres rationnels avec  $a < b$ , il existe un nombre rationnel  $c$  tel que  $a < c < b$ ), mais il n'est pas complet. Tout nombre rationnel peut être représenté par une fraction de type  $a/b$ ,  $a$  et  $b$  entiers,  $b \neq 0$ . Un nombre réel non rationnel est dit **irrationnel**.

On construit une extension du corps des réels : le corps des **complexes**  $\mathbb{C}$ , défini comme l'ensemble des couples ordonnés de nombres réels  $(a', a'')$ , muni d'une addition :

$$(a', a'') + (b', b'') = (a' + b', a'' + b'')$$

et d'une multiplication :

$$(a', a'')(b', b'') = (a'b' - a''b'', a'b'' + a''b')$$

pour lesquelles les propriétés usuelles sont valables. L'élément neutre pour l'addition est  $(0, 0)$  et pour la multiplication  $(1, 0)$ . L'opposé de  $(a', a'')$  est  $(-a', -a'')$ , l'inverse de  $(a', a'') \neq (0, 0)$  est

$$(a'/(a'^2 + a''^2), -a''/(a'^2 + a''^2)).$$

## E- Ensemble des nombres complexes :

De type  $(a', 0)$  est **isomorphe** à l'ensemble des nombres réels, et on identifie le nombre complexe  $(a', 0)$  au nombre réel  $a'$ . Le corps des nombres complexes n'est pas ordonné ; autrement dit, il n'existe aucune relation d'ordre, compatible avec les opérations, qui en fasse un corps ordonné.

Il résulte des définitions que tout nombre complexe  $z = (a', a'')$  peut être écrit

$$(a', 0) + (0, 1)(a'', 0),$$

où  $(a', 0)$  et  $(a'', 0)$  sont identifiés aux nombres réels  $a'$  et  $a''$ , tandis que le nombre complexe,  $i = (0, 1)$ , appelé unité imaginaire, jouit de la propriété que son carré est égal au nombre réel **-1**. On en déduit la représentation de **z** sous la forme algébrique  $z = a' + ia''$  ;  $a'$  est appelé la partie réelle, notée **Re (z)**, et  $a''$  la partie imaginaire, notée **Im (z)**, de  $z$ . un nombre complexe non nul dont la partie réelle est nulle est dit **imaginaire pur**. Deux nombres complexes dont les parties réelles sont égales et les parties imaginaires opposées sont dits **conjugués** : si  $z = a' + ia''$ , son conjugué  $a' - ia''$  est noté en général  $\bar{z}$ .

Les nombres complexes admettent une représentation géométrique dans le plan (plan de **Argand-Gauss**) muni d'un système d'axes cartésiens orthogonaux : on associe au nombre  $x + iy$  le point de coordonnées  $(x, y)$ . Le nombre est appelé **affixe** du point correspondant. Les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont appelés respectivement **axe réel** et **axe imaginaire**.

Un nombre, réel ou complexe, est dit **algébrique de degré n**, s'il est solution d'une équation algébrique de degré  $n$  ; il est dit **transcendant**, s'il n'existe aucune équation algébrique de ce type dont il soit racine.

Les nombres rationnels sont les nombres algébriques de degré 1, les nombres  $\sqrt{2}$  et  $i$  sont des **exemples** de nombres algébriques de degré 2. Le nombre d'**Euler** et le nombre  $\pi$  sont **deux exemples** importants de nombres transcendants. On a les relations d'inclusion ensemblistes :

**NCZOCRC.**